دانشکده مهندسی صنایع
نیمسال اول ۹۳ - ۹۲

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي 93-1392
دانشكده صنايع واحد تهران جنوب

	نام درس : معادلات ديفرانسيل — نام استاد : اساتيد گروه رياضي — كد درس : 3038 — گروه آموزشي : رياضي
	تاريخ امتحان : 1392/10/22 — مدت امتحان : 2 ساعت — نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ — ساير موارد
بارم سئوالات	استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ■ — به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ■

۱-معادلات ديفرانسيل زير را حل كنيد.

2 نمره — الف) $y' = \dfrac{x^2 - 2y^2}{xy}$

2 نمره — ب) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x-1}y^2$

2 نمره — ج) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 + 1$

2 نمره — د) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x}$

2 نمره — 2-ابتدا α و β را بيابيد به طوريكه $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرالساز معادله ديفرانسيل زير باشد سپس معادله را حل كنيد.

$$y(y^2+1)dx + x(y^2-1)dy = 0$$

1 نمره — 3- هرگاه $y_1(x) = x$ يك جواب خصوصي معادله $y'' + 2xy' - 2y = 0$ باشد جواب عمومي آنرا بيابيد.

4- مطلوب است محاسبه هر يك از موارد زير:

1 نمره — الف) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+5s-1}\right)$

1 نمره — ب) $L\left(\int_0^t e^{-2u}\cos(3u)du\right)$

2 نمره — 5- معادله زير را به كمك تبديل لاپلاس حل كنيد.

$$y'' + 4y = 2t, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

3 نمره — 6- جواب عمومي معادله ديفرانسيل $y'' + 3xy' + 3y = 0$ را به روش سري توانی حول $x_0 = 0$ به دست آوريد.

نكته: كاركلاسي ۲ نمره

موفق وپيروز باشيد

۱)الف

$$y' = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$$

برای آن‌که معادله‌ی فوق همگن باشد، باید سمت راست معادله با تغییر x و y به λx و λy تغییر نکند. بنابراین داریم:

$$y' = \frac{(\lambda x)^2 - 2(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} \Rightarrow y' = \frac{\lambda^2(x^2 - 2y^2)}{\lambda^2(xy)} = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$$

برای حل معادلات همگن از تغییر متغیر $y = ux$ که نتیجه می‌دهد $y' = u + u'x$ ، استفاده می‌کنیم.

$$u + u'x = \frac{x^2 - 2u^2x^2}{ux^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1 - 2u^2}{u} - u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1 - 3u^2}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{1 - 3u^2}du = \frac{1}{x}dx \overset{\int}{\Rightarrow} -\frac{1}{6}\ln(1 - 3u^2) = lnx + c$$

در پایان با جای‌گذاری $u = \frac{y}{x}$ جواب معادله بدست می‌آید.

$$-\frac{1}{6}\ln\left(1 - 3(\frac{y}{x})^2\right) = lnx + c$$

۱)ب

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1 - x}y^2$$

معادله‌ی فوق یک معادله مرتبه اول برنولی با $n = 2$ است، ابتدا طرفین معادله فوق را بر y^{-2} ضرب می‌کنیم.

$$(y^{-2})y' + \frac{2}{x}y^{-1} = \frac{1}{1 - x}$$

سپس با تغییر متغیر $u = y^{-1}$ که نتیجه می‌دهد $u' = -y^{-2}y'$ داریم:

$$-u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{1 - x} \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = -\frac{1}{1 - x}$$

اگر فرم استاندارد معادله مرتبه اول خطی به صورت $y' + p(x)y = q(x)$ تعریف شود، جواب آن به صورت زیر خواهد بود.

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$$

در این سوال $p(x) = -\frac{2}{x}$ و $q(x) = -\frac{1}{1-x}$ خواهد بود که با جای‌گذاری آن در فرمول فوق خواهیم داشت:

$$y = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int -\frac{1}{1-x}e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + c\right) \Rightarrow y = e^{2\ln x}\left(\int -\frac{1}{1-x}\, e^{-2\ln x}dx + c\right)$$

$$\Rightarrow y = x^2\left(\int \frac{1}{x-1}x^{-2}dx + c\right) \Rightarrow y = x^2\left(\int \frac{1}{x^2(x-1)}dx + c\right)$$

انتگرال فوق به راحتی از روش گسترش به صورت کسرهای جزئی قابل حل است.

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \Rightarrow A = 1, B = -1, C = -1$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود.

$$y = x^2\left(\ln(x-1) + \ln x - \frac{1}{x} + c\right)$$

۱)ج

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 + 1$$

معادله فوق از نوع کوشی اویلر و ناهمگن است. در ابتدا برای یافتن پاسخ همگن، معادله مشخصه کوشی اویلر را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

پایه‌های جواب معادله همگن: x و x^2

برای یافتن جواب خصوصی از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم. در این روش پاسخ خصوصی از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$y_p = y_1\int \frac{w_1}{w}dx + y_2\int \frac{w_2}{w}dx$$

تدریس خصوصی دروس علوم پایه و مهندسی برق
۰۹۱۲۵۰۱۸۹۸۰-۰۹۳۵۲۵۴۰۳۳۷
وب سایت: www.takhtesabz.ir
ایمیل: info@takhtesabz.ir

که y_1 و y_2 پایه‌های جواب معادله همگن است و w، w_1 و w_2 از روابط زیر بدست می‌آیند. (به راحتی می‌توان فرم جواب و این روابط را به معادله با مرتبه‌های بالاتر تعمیم داد).

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = x^2 \qquad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix} = -x^3 - 1 \qquad w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix} = \frac{x^3+1}{x}$$

در روابط فوق R قسمت ناهمگن معادله‌ای است که ضریب y'' برابر با یک باشد $\left(R = \frac{x^3+1}{x^2}\right)$. با جای‌گذاری پایه‌های جواب و محاسبه‌ی مقادیر فوق جواب خصوصی برابر است با:

$$y_p = x\int -\frac{x^3+1}{x^2}dx + x^2\int \frac{x^3+1}{x^3}dx \Rightarrow y_p = x\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) + x^2\left(x - \frac{x^{-2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y_p = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$$

۱) د

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x}$$

با تشکیل معادله مشخصه پایه‌های جواب معادله همگن را می‌یابیم.

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = \pm i$$

پایه‌های جواب معادله همگن: x^{-1}، $\sin(\ln x)$ و $\cos(\ln x)$

برای یافتن پاسخ خصوصی از هر یک از روش‌های ضرایب نامعین، اپراتورهای معکوس و تغییر پارامتر (لاگرانژ) می‌توان استفاده نمود. این سوال را با دو روش ضرایب نامعین و اپراتورهای معکوس حل می‌نماییم.

روش اول: ضرایب نامعین

با توجه به این‌که یکی از ریشه‌های معادله مشخصه برابر توان جمله نمایی $(\lambda = -1)$ است، فرم جواب خصوصی به صورت $y_p = Axe^{-x}$ می‌باشد.

$$y_p = Axe^{-x} \Longrightarrow y_p' = Ae^{-x}(1-x) \Longrightarrow y_p'' = Ae^{-x}(-2+x) \Longrightarrow y_p''' = Ae^{-x}(3-x)$$

از آن‌جایی که جواب خصوصی در معادله ناهمگن صدق می‌کند، با جای‌گذاری آن در معادله داریم:

$$Ae^{-x}(3-x) + Ae^{-x}(-2+x) + Ae^{-x}(1-x) + Axe^{-x} = e^{-x}$$

$$\Longrightarrow A(3-x) + A(-2+x) + A(1-x) + Ax = 1 \Longrightarrow 2A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{2} \Longrightarrow y_p = \frac{x}{2}e^{-x}$$

روش دوم: اپراتور معکوس

در این روش از رابطه‌ی زیر برای محاسبه‌ی پاسخ خصوصی استفاده می‌کنیم.

$$y_p = \frac{1}{(D-p)^k F(D)}\{e^{px}\} = \frac{x^k e^{px}}{k!\,F(p)}$$

در این مثال $p = -1$ است، بنابراین داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3 + D^2 + D + 1}\{e^{-x}\} = \frac{1}{(D+1)(D^2+1)}\{e^{-x}\} = \frac{x^1 e^{-x}}{1!\,((-1)^2+1)} = \frac{x}{2}e^{-x}$$

جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1 x^{-1} + c_2 \sin(\ln x) + c_3 \cos(\ln x) + \frac{x}{2}e^{-x}$$

---

۲)

$$y(y^2+1)dx + x(y^2-1)dy = 0$$

با ضرب $x^\alpha y^\beta$ در طرفین معادله داده شده داریم:

$$\left(x^\alpha y^{\beta+3} + x^\alpha y^{\beta+1}\right)dx + \left(x^{\alpha+1}y^{\beta+2} - x^{\alpha+1}y^\beta\right)dy = 0$$

برای کامل شدن معادله فوق باید:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{\alpha}y^{\beta+3}+x^{\alpha}y^{\beta+1}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha+1}y^{\beta+2}-x^{\alpha+1}y^{\beta}\right)\Rightarrow$$

$$(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2}+(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}=(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}-(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta+3=\alpha+1\\ \beta+1=-\alpha-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=-2\\ \beta+\alpha=-2\end{cases}\Rightarrow\alpha=0,\beta=-2$$

با جای‌گذاری α و β معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$(y+y^{-1})dx+(x-xy^{-2})dy=0$$

با توجه به کامل بودن معادله باید تابعی مانند $u(x,y)$ وجود داشته باشد به نحوی که:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+y^{-1}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x-xy^{-2}\end{cases}$$

از معادله اول نسبت به متغیر x (با فرض ثابت بودن y) انتگرال می‌گیریم، ثابت انتگرال‌گیری می‌تواند تابعی از y باشد، لذا خواهیم داشت:

$$u=\int(y+y^{-1})dx+A(y)\Rightarrow u=xy+xy^{-1}+A(y)$$

با جای‌گذاری u به دست آمده در معادله دوم $A(y)$ به دست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+xy^{-1}+A(y)\right)=x-xy^{-2}\ \Rightarrow$$

$$x-xy^{-2}+\frac{d}{dy}A(y)=x-xy^{-2}\Rightarrow\frac{d}{dy}A(y)=0\Rightarrow A(y)=0$$

لذا جواب عمومی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(x,y)=c\Rightarrow xy+xy^{-1}=c$$

سعی کنید این سوال را از روش تفکیک پذیر نیز حل کنید.

وب سایت: www.takhtesabz.ir
ایمیل: info@takhtesabz.ir
تدریس خصوصی دروس علوم پایه و مهندسی برق
۰۹۱۲۵۰۱۸۹۸۰-۰۹۳۵۲۵۴۰۳۳۷
گروه آموزشی تخته سبز

۳)

$y''+2xy'-2y=0$

در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$، اگر y_1 یک پایه جواب این معادله باشد، پایه جواب دیگر معادله را می‌توان از رابطه $y_2=u(x)y_1$ به‌دست آورد که در آن:

$$u(x)=\int\frac{1}{y^2}e^{-\int P(x)dx}$$

اثبات (برای مطالعه‌ی بیش‌تر):

$$y_2=uy_1\Rightarrow y_2'=u'y_1+y_1'u\Rightarrow y_2''=u''y_1+2y_1'u'+y_1''u$$

با جای‌گذاری y_2 در معادله خواهیم داشت:

$$u''y_1+2y_1'u'+y_1''u+P(x)(u'y_1+y_1'u)+Q(x)uy_1=0\Rightarrow$$
$$u(y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1)+(y_1u''+2u'y_1'+P(x)u'y_1)=0$$

با توجه به این‌که y_1 جوابی از معادله دیفرانسیل است، قسمت اول از عبارت فوق برابر صفر است، بنابراین:

$$y_1u''+2u'y_1'+P(x)u'y_1=0\Rightarrow u''+u'\left(\frac{2y_1'}{y_1}+P(x)\right)=0$$

با تغییر متغیر $u'=w$ داریم:

$$w'=-w\left(\frac{2y_1'}{y_1}+P(x)\right)\Rightarrow w=e^{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+P(x)\right)dx}\Rightarrow w=e^{\ln y_1^{-2}-\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow w=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}\Rightarrow u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}\,dx$$

در این سوال $P(x)=2x$ و $y_1=x$، با جای‌گذاری آن در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{-\int 2xdx}\,dx=\int\frac{1}{x^2}e^{-x^2}\,dx=!!!$$

۴)الف

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2+5s-1}\right)$$

در لاپلاس معکوس $e^{-as}F(s)$، بی‌خیال e^{-as} شده، لاپلاس معکوس $F(s)$ را به‌دست می‌آوریم، سپس عبارت حاصله را با دو عمل بازنویسی می‌کنیم. اول هر چه t وجود دارد به $t-a$ تبدیل کرده، سپس حاصل را در $u_a(t)$ ضرب می‌کنیم.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5s-1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}\right)=e^{-\frac{5}{2}t}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\frac{29}{4}}\right)=e^{-\frac{5}{2}t}\frac{2}{\sqrt{29}}\sinh\frac{\sqrt{29}}{2}t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2+5s-1}\right)=u_\pi(t)\,e^{-\frac{5}{2}(t-\pi)}\frac{2}{\sqrt{29}}\sinh\frac{\sqrt{29}}{2}(t-\pi)$$

ب)

$$L\left\{\int_0^t e^{-2u}\cos(3u)\,du\right\}$$

وقتی می‌خواهیم لاپلاس انتگرال 0 تا t تابعی را محاسبه کنیم، بی‌خیال عمل انتگرال‌گیری شده، لاپلاس تابع زیر علامت انتگرال را به‌دست می‌آوریم و در حاصل کار $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

$$L\left\{\int_0^t e^{-2u}\cos(3u)\,du\right\}=\frac{1}{s}L\{e^{-2u}\cos(3u)\}$$

وقتی تابعی در e^{at} ضرب می‌شود، برای محاسبه لاپلاس آن بی‌خیال e^{at} شده، لاپلاس تابع باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم. سپس در حاصل کار s ها را به $s-a$ تبدیل می‌کنیم.

$$L\left\{\int_0^t e^{-2u}\cos(3u)\,du\right\}=\frac{1}{s}\times\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

۵)

$$y''+4y=2t \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$$

از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)-4y(0)=\frac{2}{s^2} \Longrightarrow Y(s)=\frac{2}{s^2(4+s^2)}$$

برای محاسبه لاپلاس معکوس فوق باید ابتدا از گسترش کسر به صورت‌های جزئی استفاده کنیم.

$$\frac{2}{s^2(4+s^2)}=\frac{As+B}{s^2}+\frac{Cs+D}{4+s^2} \Longrightarrow A=0.5 \quad ,C=-0.5 \quad ,B=D=0$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4+s^2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

---

۶)

$$y''+3xy'+3y=0$$

نقطه‌ی $x_0=0$ یک نقطه‌ی عادی برای معادله دیفرانسیل است. بنابراین جواب را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Longrightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \Longrightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جای‌گذاری در معادله اصلی داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

باید با تغییر متغیر n سعی کنیم توان x در همه‌ی عبارت‌ها یکسان شود. یعنی توان عبارت دوم و سوم را $n-2$ شود.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0 \Longrightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + 3a_0 + 3\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0 \Longrightarrow$$

$$2a_2 + 3a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-2}\left(n(n-1)a_n + 3(n-2)a_{n-2} + 3a_{n-2}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$2a_2 + 3a_0 = 0 \qquad , n(n-1)a_n + 3(n-2)a_{n-2} + 3a_{n-2} = 0 \Longrightarrow$$

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_0 \qquad , a_n = -\frac{3}{n}a_{n-2}$$

با یافتن چند جمله‌ی ابتدایی جواب عمومی معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{8}x^4 + \cdots\right) + a_1\left(x - x^3 + \frac{3}{5}x^3 + \cdots\right)$$